Math 110 : Algebre Lineaire Avancee

E.

Ensembles:

ENS : Collection d'Objets equipes d'une relation d'appartenaice

e, A des ensembles

$$e \in A$$

et d'une relation d'inclusion

$$A \subset B : \ e \in A \Rightarrow e \in B$$

Axiomes de la Théorie des Ensembles

Les ENS sont

soumis a un ensemble fini d'axiomes

- Ensemble $\emptyset$
- x2 inclusion
- Ens des Parties
- Reunion

- Paire
- ∞
- ⋮
- Axiome du Choix (?)

qui permettent de construire de

nouveaux ensembles

Construction de $\mathbb{N}$ (Peano)

$$0 := \emptyset$$

$$1 := \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\vdots$$

$$n+1 = \bigcup_{\{n,\{n\}\}} = n \cup \{n\}$$

Produit Cartésien d'Ensembles

$$A \times B = \{ (a,b) = \{a, \{a,b\}\} \quad a \in A, b \in B \}$$

$$\prod_{n=1}^{N} A_n = \{ (a_1, \dots, a_N) \quad a_i \in A_i \}$$

$$\prod_{i \in I} A_i = \{ (a_i)_{i \in I} \quad a_i \in A_i \} \Longleftarrow \text{A} \times \text{Choix}$$

Relations Binaires

$R \subset A \times B$: $aRb \iff (a,b) \in R$

$A = B$: propriétés supplementaires

- Sym, Reflex, transit

Ordre, equivalence

Ex : $A = B = \mathbb{N}$: $\leq$, $|$, $\equiv (q)$

Applications entre ensembles

$f : X \longrightarrow Y \iff$ graphe de f

$G_f \subset X \times Y$ tq $x_0 \in X$

$G_{f, x_0} = \{ (x_0, y) \quad y \in Y \}$ a un elt exactement

$y = f(x_0)$

$\mathrm{Hom}_{ENS}(X,Y) = \{ f : X \to Y \}$ et un ensemble le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X \times Y)$ forme des graphes

$$\mathrm{Hom}_{ENS}(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y) = Y^X$$

$$Y^X = \prod_{x \in X} Y = \{ (f(x))_{x \in X} \quad x \in X \; f(x) \in Y \}$$

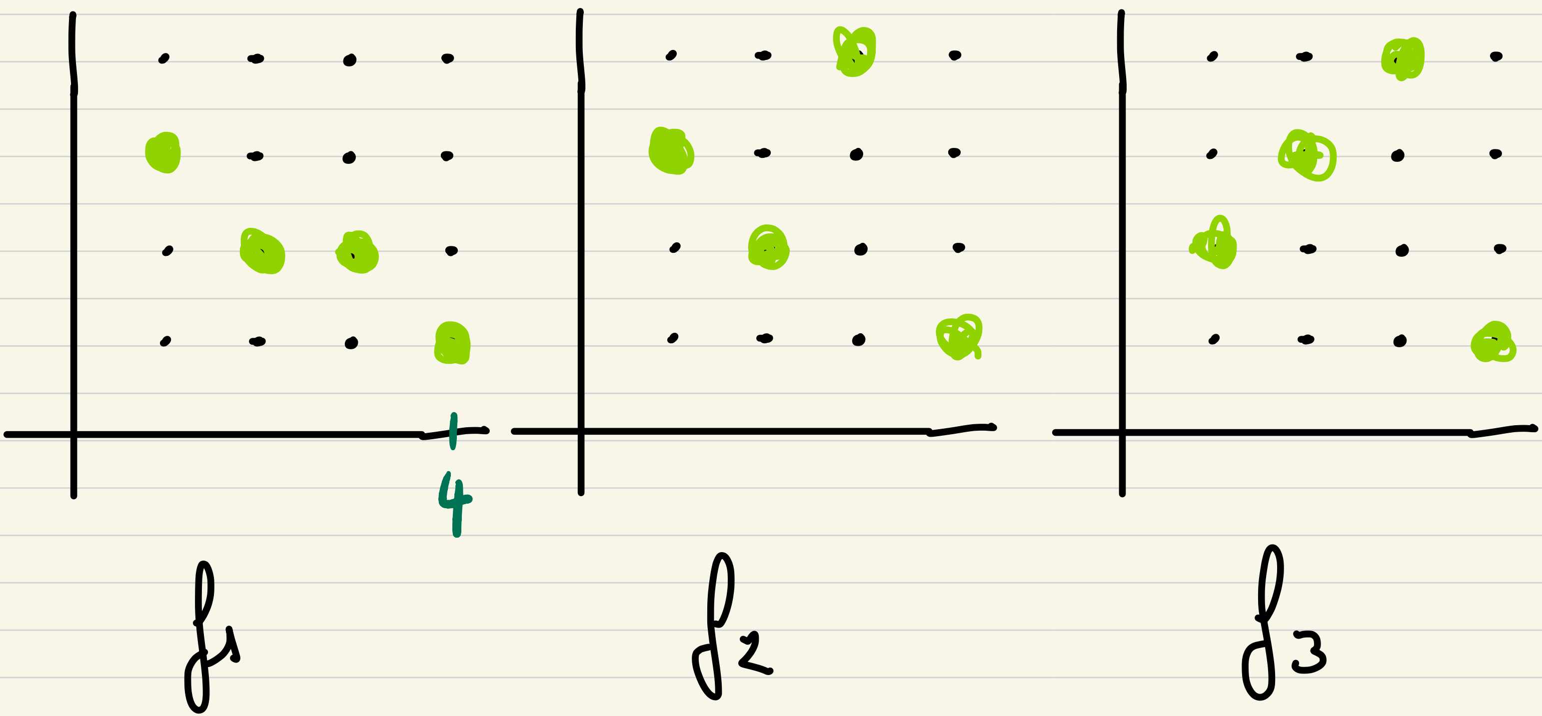
$$|x| = M \geq 0$$

$$|y| = N \geq 0$$

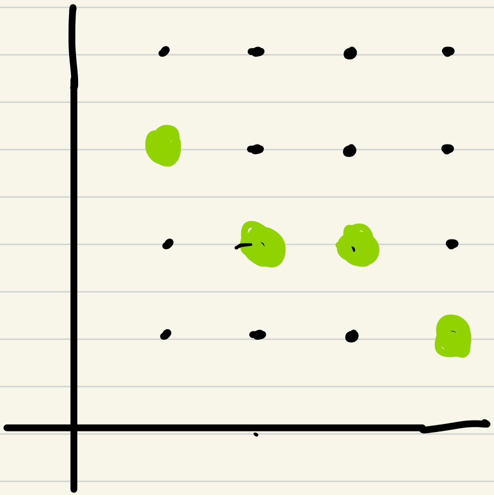
$$|y^x| = N^M$$

$$X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$$

- $f_1: 1 \to 3,\ 2 \to 2,\ 3 \to 2,\ 4 \to 1$
- $f_2: 1 \to 3,\ 2 \to 2,\ 3 \to 4,\ 4 \to 1$
- $f_3: 1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 4,\ 4 \to 1$

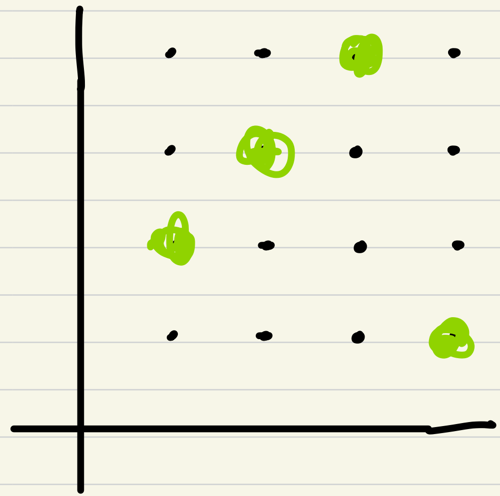


4
f_1
f_2
f_3



f_1

f_2



f_3

Image / Preimage : $f : X \to Y$

Def : $A \subset X$ l'image de A par f

$$f_*(A) = \{ f(x) \quad x \in A \} \subset Y$$

$A = \{1,2\}$ $f_i(\{1,2\}) = \{2,3\}$ $i = 1, 2, 3$

$A' = \{1,4\}$ $f_2(A') = \{1,3\}$ $f_2(A') = \{1,3\}$ $f_3(A') = \{1,2\}$

Def: $f : X \to Y$. $B \subset Y$.

la preimage de B par f

$$f^{*}(B) = \{x \in X \text{ tq } f(x) \in B\} = f^{(-1)}(B)$$

$B = \{1,2\}$ $\quad f_1^{*}(B) = \{2,3,4\}$ $\quad f_2^{*}(B) = \{2,4\}$

$f_3^{*}(B) = \{1,4\}$ $\quad f_1^{*}(\{4\}) = \emptyset$

Cas Particuliers

- $A = X$ $\quad f_*(X) =$ l'image de X par f

- $B = \{y\} \subset Y$ $\quad f^*(\{y\}) = \{x \in X \text{ tq } f(x) = y\}$

$=$ l'ensemble des antecedents de y.

<u>Rmq</u>: si $y \notin \mathrm{Im}(f)$ $f^{*}(\{y\}) = \emptyset$

et si $B \cap \mathrm{Im}(f) = \emptyset$ $f^{*}(B) = \emptyset$

- $B = Y$ $f^{*}(Y) = X$.

$$
\begin{aligned}
f_* : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\
A &\longmapsto f_*(A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^* = f^{(-1)} : \mathcal{P}(Y) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\
B &\longmapsto f^*(B)
\end{aligned}
$$

Injectivité / Surjectivité / Bijectivité

Def : $f : X \to Y$ est injective (into) $f : X \hookrightarrow Y$

\hookrightarrow

ssi $\forall y \in Y$ $f^{(-1)}(\{y\})$ possède au plus 1 élt.

f_1 non-inj f_2, f_3 inj

Def: $f: X \to Y$ est surjective (onto) $f: X \twoheadrightarrow Y$
$x \mapsto y$
\surj
\mapsto

ssi $\forall y \in Y$

$$f^{(-1)}(\{y\}) \neq \emptyset \text{ (possède au - un elt)}$$

f_1 pas surj, f_2 surj f_3 surj.

<u>Def</u>: $f : X \to Y$ est bijective (One-to-One)

$f : X \simeq Y$

\simeq

ssi f est inj & surj

f_1 non bij $\quad f_2$ bij $\quad f_3$ bij

Notations

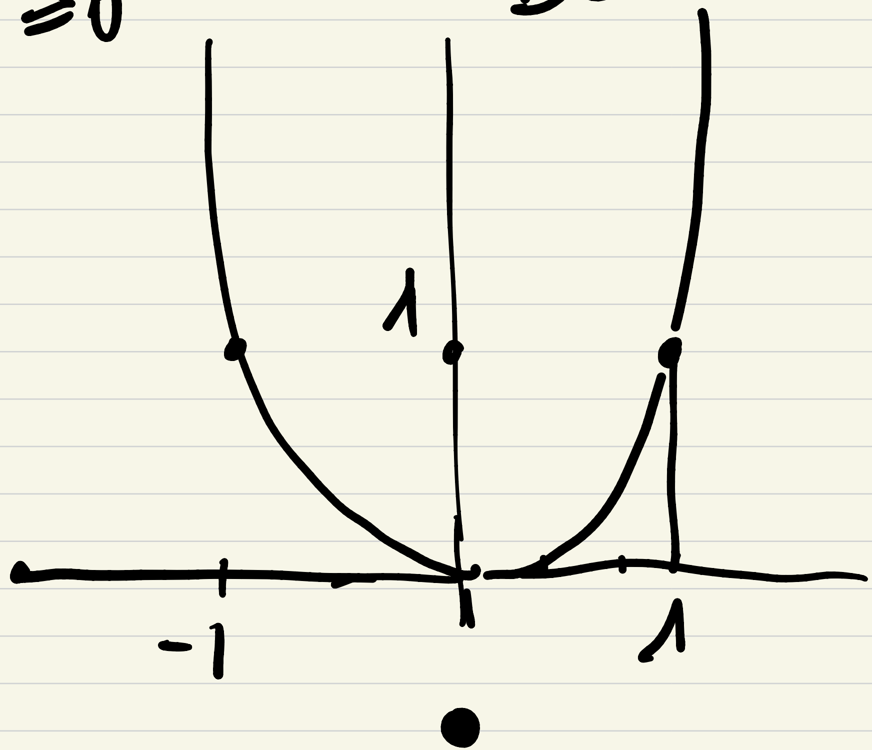
$INJ(X,Y)$

$SURJ(X,Y)$

$$BIJ(X,Y) = INJ(X,Y) \cap SURJ(X,Y)$$

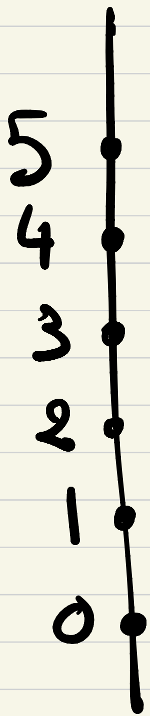
$$= Isom_{ENS}(X,Y)$$

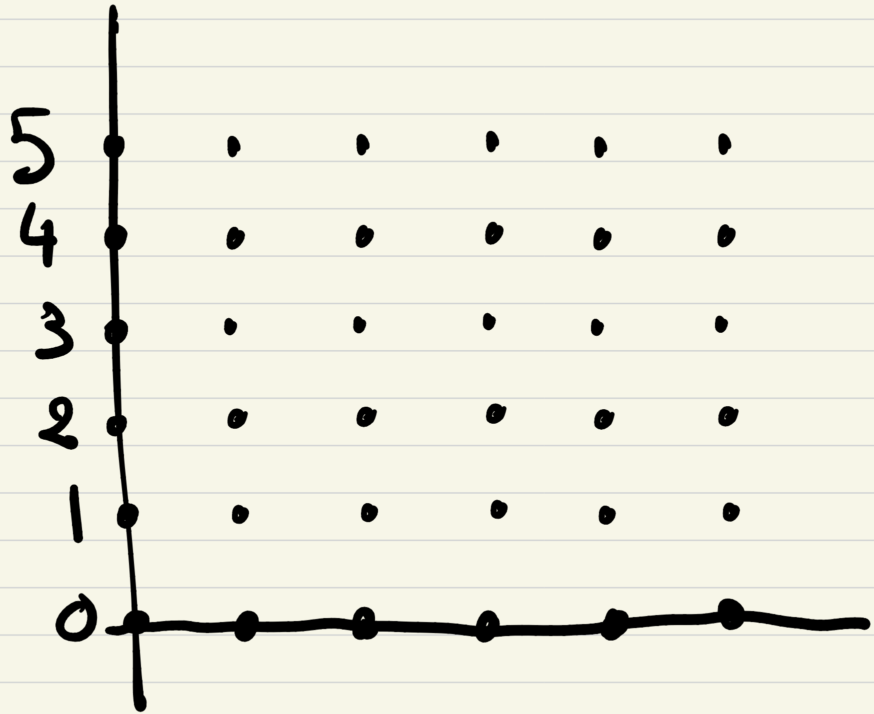
$$f: x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$



Rmq : $f : X \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f) < Y$

$\mathbb{N}$ vs $\mathbb{N}^2$





$$C : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$(m,n) \mapsto \frac{1}{2}\left((m+n)^2 + m + 3n\right)$$

$C(0,0) = 0 \quad C(1,0) = 1 \quad C(0,1) = 2$

$C(2,0) = 3 \quad C(1,1) = 4 \quad C(0,2) = 5$

<u>Ex</u> : trouvez <u>2</u> autres fcts polynomiales qui réalisent une bij entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$

Application réciproque : $f : X \xrightarrow{\sim} Y$

f bijective : pour tout $y \in Y$ $\exists!\, x$ tq

$$f(x) = y$$

Cela signifie également que $\forall y \in Y$ il existe x tq $y = f(x)$ (f est surj) et ce x est unique (f est injective) on définit alors une application

$f^{-1} : Y \longrightarrow X$ qui a $y \in Y$

associe l'unique $x \in X$ tq $f(x) = y$

Ce x on le note $f^{-1}(y)$ et on a

définit

$f^{-1} : Y \to X$ application réciproque

de f

Comme f est bij alors f^{-1} est aussi bij.

$$\bullet^{-1} : \mathrm{Bij}_{ENS}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Bij}_{ENS}(Y, X)$$

$$f \longrightarrow f^{-1}$$

THE WARNING

f^{-1} n'existe que si f est bijective (Inj + Surj)

par contre la preimage

$f^{(-1)} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ existe toujours

(que f soit Bij ou Pas)

Involutivité : de la réciproque

$$f : X \xrightarrow{\sim} Y \longrightarrow f^{-1} : Y \xrightarrow{\sim} X$$

que vaut $(f^{-1})^{-1}$?

$(f^{-1})^{-1} : X \longrightarrow Y$ c'est f

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Composition d'applications

$f : X \longrightarrow Y \qquad g : Y \longrightarrow Z$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

$g \circ f : x \longrightarrow g(f(y))$

\circ

Composition et Hom's

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ENS}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{ENS}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{ENS}}(X,Z)$$

$$(g\,,\,f) \longrightarrow g \circ f$$

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

$$f_1 : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$$

$$f_2 : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$$

$$f_2 \circ f_1 : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 2 \\ 3 & \to & 2 \\ 4 & \to & 3 \end{array}$$

Propriétés de la composition

Associativité : $f : X \to Y \quad g : Y \to Z \quad h : Z \to T$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$x \to h(g \circ f(x)) \qquad x \to (h \circ g)(f(x))$$

$$h(g(f(x))) = h(g(f(x)))$$

On ecrira : $h\circ g\circ f$ pour $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

- Neutralité de l'identité : Rappel tout ensemble X (non vide) possede une application naturelle de X vers X

$$Id_X : x\in X \longrightarrow x\in X$$

Id_X est bijective et $Id_X^{-1} = Id_X$

- Soit $f : X \longrightarrow Y$

$$f \circ Id_X : X \xrightarrow{Id_X} X \xrightarrow{f} Y = f$$
$$x \longrightarrow x \longrightarrow f(x)$$

$$Id_Y \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Id_Y} Y = f$$
$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow f(x)$$

Neutralité de l'identité :

$$f \circ Id_X = f$$

$$Id_Y \circ f = f$$

<u>Simplification:</u> $f : X \xrightarrow{\sim} Y$

$f^{-1} : Y \xrightarrow{\sim} X$

$$f^{-1} \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f^{-1}} X$$

$$f \circ f^{-1} : Y \xrightarrow{f^{-1}} X \xrightarrow{f} Y$$

$$f^{-1} \circ f : \quad x \longrightarrow f(x) \longrightarrow f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f^{-1} \circ f = Id_X$$

$$f \circ f^{-1} : \quad y \longrightarrow f^{-1}(x) \longrightarrow f(f^{-1}(y)) = y$$

$$f \circ f^{-1} = Id_Y$$

Notation puissance

$k \geqslant 0 \quad f : X \longrightarrow X$

$f^2 = f \circ f, \; f^3 = f \circ f \circ f, \quad \underbrace{f \circ \cdots\cdots f}_{k} = f^k \quad f^0 = Id_X$

si de plus $f \in Bij(X, X)$

$f^{-1} = $ reciproque $\quad f^{-k} = (f^{-1})^k$

$k, \ell \in \mathbb{Z}$

$$f^k \circ f^\ell = f^{k+\ell}.$$

$f_1 : \mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$ comme on a le resultat suivant : si $X \simeq X'$ et $Y \simeq Y'$

alors $X \times Y \simeq X' \times Y'$

$f : X \simeq X'$ $\quad g : Y \to Y'$

$$(f,g) : \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X' \times Y' \\ (x,y) & \longrightarrow & (f(x), g(y)) \end{array}$$

$C: \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{N} \quad \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}^3 \simeq \mathbb{N} \ldots\ldots \quad \forall k \geq 1 \quad \mathbb{N}^k \simeq \mathbb{N}$

Composition, Injectivité, Surjectivité, Bijectivité

LEMME 1.1. *Soient des applications* $f : X \mapsto Y$ *et* $g : Y \mapsto Z$*. Si*

(1) *Si* f *et* g *sont injectives,* $g \circ f$ *est injective.*
(2) *Si* f *et* g *sont surjectives,* $g \circ f$ *est surjective.*
(3) *Si* f *et* g *sont bijectives,* $g \circ f$ *est bijective et*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Preuve: (2) soit $f : X \twoheadrightarrow Y$ et $g : Y \twoheadrightarrow Z$

soit $z \in Z$ ov mq $\exists\, x \in X$ tq $g \circ f(x) \overset{?}{=} z$

Preuve : (2) Comme g est surj $\exists\, y \in Y$ tq

$$g(y) = z$$

comme f est surj $\exists\, x \in X$ tq $f(x) = y$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

$g \circ f \twoheadrightarrow$

fin de (3): avec (1)+(2) on a mq si f et g sont bij

alors $g\circ f$ est bij

on veut la formule pour $(g\circ f)^{-1} \overset{?}{=} f^{-1}\circ g^{-1}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] & Z \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \arrow[ll, bend left=60, "f^{-1}\circ g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

on calcule

$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})(z)$

$=(g\circ f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(z)$

$$f \circ f^{-1} = Id_Y \qquad (g \circ Id_Y \circ g^{-1})(z)$$

$$= (g \circ g^{-1})(z)$$

$$= Id_Z(z) = z$$

de même $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) = x$

$f^{-1} \circ g^{-1}$ est la réciproque de $g \circ f$

$\square$

Cardinal d'un ENS

DÉFINITION 1.9. *Soient X et Y deux ensembles. Si il existe une bijection $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, on dit que X et Y ont le meme cardinal et on le note*

$$|X| = |Y|.$$

Def: le cardinal de X et la categorie des ensemble Y tq $|X|=|Y|$ ie $X \simeq Y$.

DÉFINITION 1.10. *Un ensemble X est fini si il est soit vide, soit en bijection avec un ensemble de la forme $n = \{0, \cdots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ un entier $\geqslant 1$. On ecrit alors*

$$|\emptyset| = 0, \ |X| = n.$$

Un ensemble est infini sinon.

DÉFINITION 1.11. *Un ensemble X est denombrable si il est fini ou a meme cardinal que $\mathbb{N}$. Un ensemble est indenombrable sinon.*

Proposition 1.2. *La relation "avoir le meme cardinal" a la proprietes suivantes*

1. *Reflexivite:* $|X| = |X|$
2. *Symetrie:* $|X| = |Y| \Longrightarrow |Y| = |X|$,
3. *Transitivite:* $|X| = |Y|$ *et* $|Y| = |Z| \Longrightarrow |X| = |Z|$.

<u>Preuve</u>: $Id_X : X \simeq X$ dc $|X| = |X|$

- $|X| = |Y| \Longleftrightarrow \exists f : X \simeq Y$ et $f^{-1} : Y \simeq X$

$$\Longleftrightarrow |Y| = |X|$$

- $|X| = |Y| \wedge |Y| = |Z| \Longleftrightarrow \exists f : X \xrightarrow{\sim} Y$ $g : Y \xrightarrow{\sim} Z$

et $g \circ f : X \xrightarrow{\sim} Z$

<u>Exemples</u>: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2| = \dots = |\mathbb{N}^k|$ pour tout k

$$\mathbb{Q}_{\geq 0} = \left\{ \frac{p}{q} \quad p,q \in \mathbb{N} \quad q \neq 0 \quad (p,q) = 1 \right\}$$

et on bij avec un ssensemble de $\mathbb{N}^2$ $\rightsquigarrow |\mathbb{Q}_{\geq 0}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$

et $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ $\quad$ $\mathbb{Q}$ est denombrable.

$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

- Soit X = Ens $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses sous ensembles

$$|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{F}(X, \{0,1\})| = |\{0,1\}^X|$$

en particulier si $|X| = n$

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n$$

la bijection $\mathcal{P}(X) \simeq \{0,1\}^X = \mathcal{F}(X,\{0,1\})$

est donnée par la "fonction caracteristique"

$$\mathbb{1}_\bullet : A \subset X \longrightarrow \mathbb{1}_A : X \to \{0,1\}$$

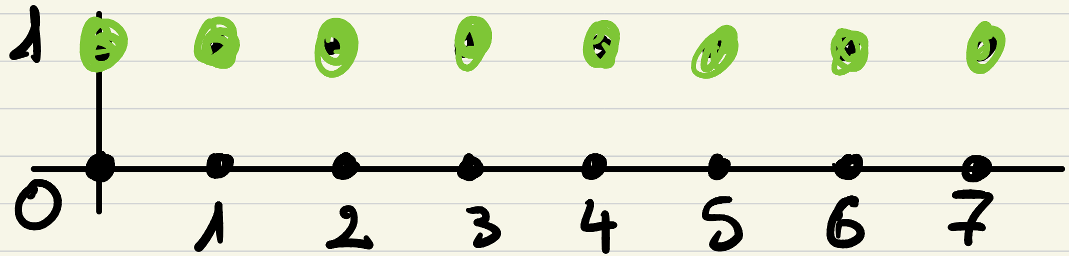
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

$\mathbb{1}_\bullet$ est une bijection dont la reciproque

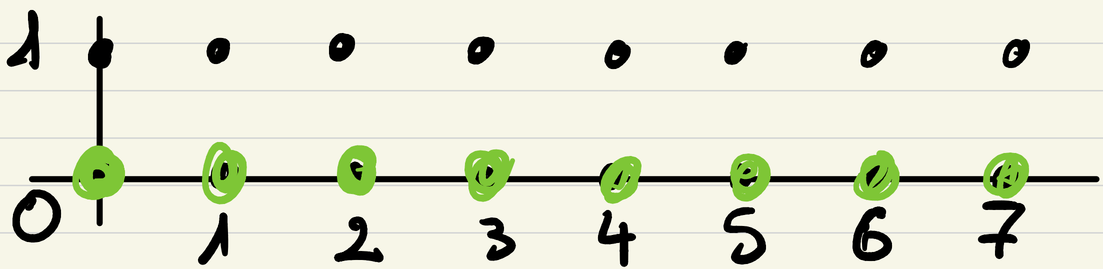
Exemples : $X = \mathbb{N}$

$A =$

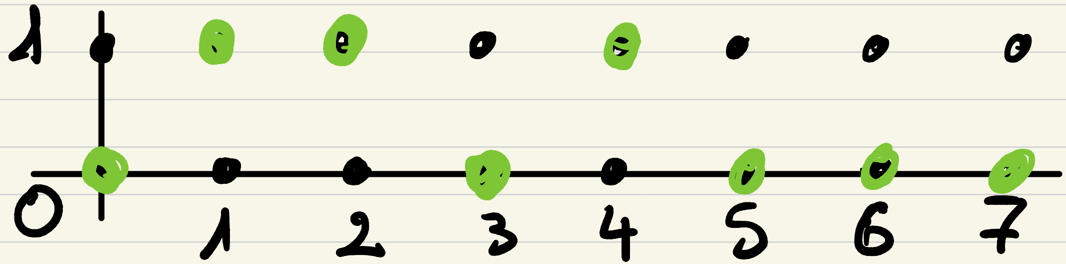
$\mathbb{N}$



$\emptyset$

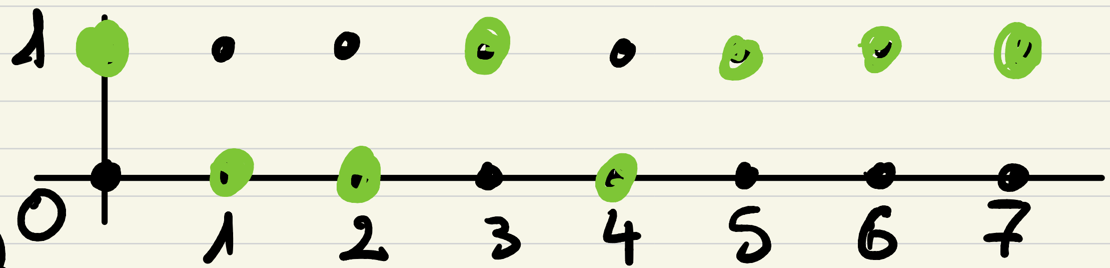


$\{1,2,4\}$



$\mathbb{N}-\{1,2,4\}$

$=\{0,3,5,6\ldots\}$



est $\{0,1\}^X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$

$(1_\bullet)^{-1} : f : X \to \{0,1\} \longrightarrow A_f =$ l'ensemble de niveau 1.

$$A_f := \{ x \in X \text{ tq } f(x) = 1 \}$$

Thm (Cantor) $\forall X$ ENS denombrable $|\mathcal{P}(X)| \neq |X|$

il n'existe pas de bij entre X et $\mathcal{P}(X)$

en particulier $|\mathbb{N}| \neq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas denombrable

Corollaire: $\mathbb{R}$ n'est pas denombrable

"Preuve" du Corollaire : on v mq $[0,1)$ n'est pas dénombrable

$$\Rightarrow |[0,1)| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \neq |\mathbb{N}| \text{ (par Cantor)}$$

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\{0,1\}) \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

On peut "essentiellement" identifie $[0,1)$ avec $\mathcal{F}(\mathbb{N},\{0,1\})$

$x \in [0,1) \rightsquigarrow x = 0{,}c_0c_1c_2 \ldots c_n \ldots$

développement binaire

$c_i \in \{0,1\}$

$$x = \frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{2^2} + \frac{c_2}{2^3} + \cdots + \frac{c_n}{2^{n+1}} + \cdots$$

$$x \longrightarrow (c_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$$

"Preuve du Thm de Cantor".

Si X est fini $|X| = n$

$|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}^X| = 2^n$ en particulier

$n < 2^n$

$|\mathcal{P}(X)| \neq |X|$

Cas X est infini $X \simeq \mathbb{N}$

il suffit de demontre Cantor pour $X = \mathbb{N}$

on vmq il n'existe pas de bijection

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$$

$\shortparallel$

les suites a valeurs ds $\{0,1\}$

Supposons qu'une telle bij existe

$$f_\bullet : n \longrightarrow f_n : m \longrightarrow f_n(m) \in \{0,1\}$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$$

Par hypothèse pour toute suite

$$f = (f(m))_{m \geqslant 0} \quad f(m) \in \{0,1\}$$

il devrait existe $n \in \mathbb{N}$ tq

$$f = f_n \ : \ \forall m \in \mathbb{N} \ f(m) = f_n(m)$$

Considerons la suite f_C (C = "Cantor")

$$f_C(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_m(m) = 1 \\ 1 & \text{si } f_m(m) = 0 \end{cases}$$

Question : la suite de Cantor

f_C doit etre egale a un certain

f_{n_C} pour $n_C \in \mathbb{N}$

Quelle est la valeur de $f_C(n_C)$?

Supposons $f_C(n_C) = 0 \Longrightarrow$?

$f_C(n_C) = 1 \Longrightarrow$?